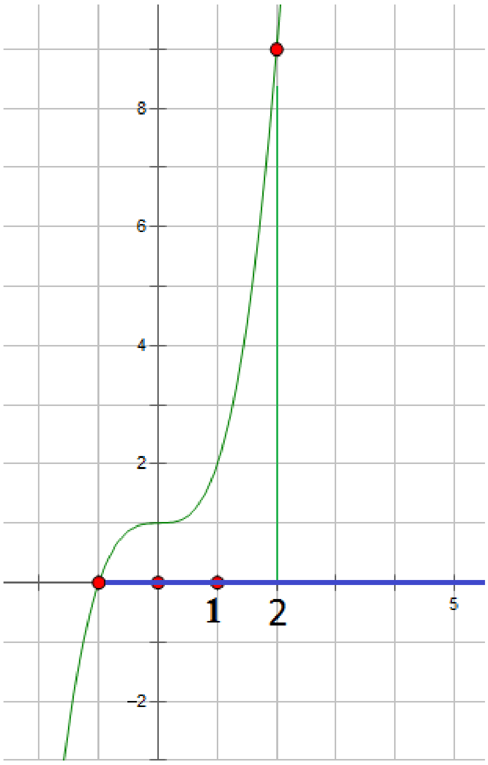
Представляю разбор контрольных работ из сборника «Л.А. Александрова. Алгебра 9 класс. Контрольные работы»

Иногда трудно самостоятельно разобраться со всеми заданиями, предлагаемыми на контрольных, особенно если некоторые из них видишь впервые. Иногда они устрашающе выглядят, а решаются достаточно просто, но, чтобы «увидеть» решение, нужен порой «толчок»: один раз понять, с какой стороны подойти к решению. Решения этих контрольных работ есть в сети, однако они даны без объяснений. Здесь же предложено подробное решение с объяснением и обоснованием. Тем, кто хочет хорошо учится – это поможет… нет, не списать, а подготовиться. Незнание тех, кто «плавает» в математике и не хочет ничего менять, все равно обнаружится рано или поздно, даже если контрольная будет списана «до буквы».

Контрольная работа 4.

Вариант 1.

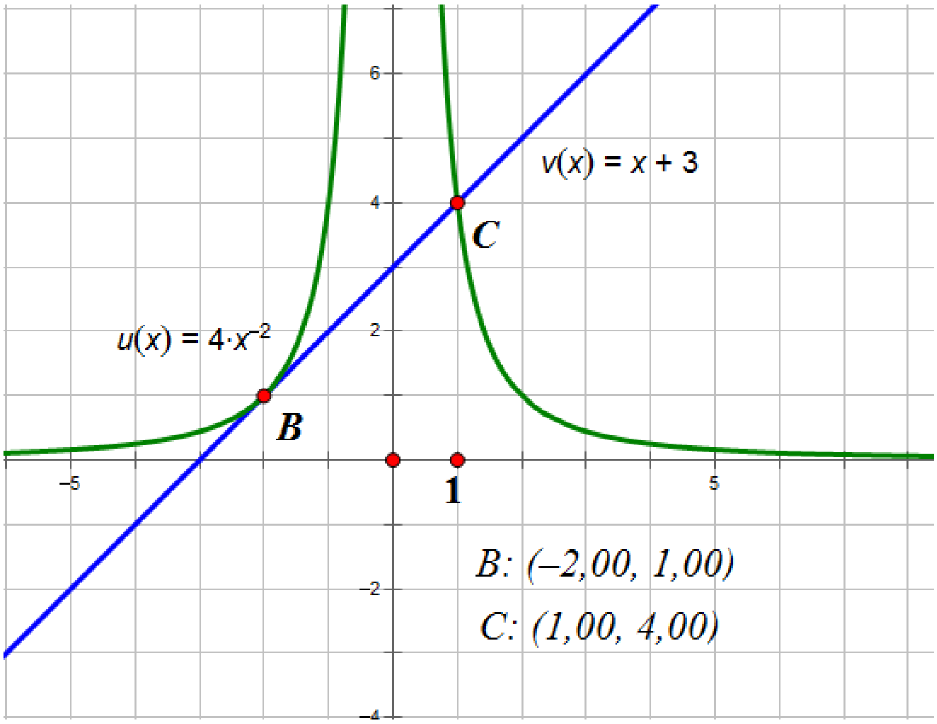
1. Постройте график функции $y = x^3 + 1$. По графику найдите:
   а) значение функции при значении аргумента, равном -1;
   б) значение аргумента, если значение функции равно 9;
   в) решение неравенства $y(x) > 0$.



а) При $x = -1 \quad y(x) = 0$.
б) $y(x) = 9$ при $x = 2$.

в) решение неравенства $y(x) > 0$: $x \in (-1;\ +\infty)$ – точка (-1) в интервал не входит.

2. Решите графически уравнение $4x^{-2} = x + 3$.



Ответ: (-2;1), (1;4).

3. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{21}\right) \cdot \sqrt[3]{49} = (7^{\frac{1}{3}} + 21^{\frac{1}{3}})49^{\frac{1}{3}} = (7^3)^{\frac{1}{3}} + (7^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 7 + 7\sqrt[3]{3}$

б) $\sqrt[3]{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{17}} = \left(9 - \sqrt{17}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(9 + \sqrt{17}\right)^{\frac{1}{3}} =$

$$\left(\left(9 - \sqrt{17}\right)\left(9 + \sqrt{17}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = \left(9^2 - \left(\sqrt{17}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}} = (81 - 17)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

4. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Решите уравнение $f(x^2) - 5f(x) + 6 = 0$.

Перепишем уравнение:

$$\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} + 6 = 0$$

Вводим замену: $x^{1/3} = t$:

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 6 = 1$$

$$t_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Делаем обратную замену:

$$\sqrt[3]{x} = 3$$

$$x_1 = 3^3 = 27$$

Либо

$$\sqrt[3]{x} = 2$$

$$x_2 = 2^3 = 8$$

Ответ: $x \in \{27, 8\}$

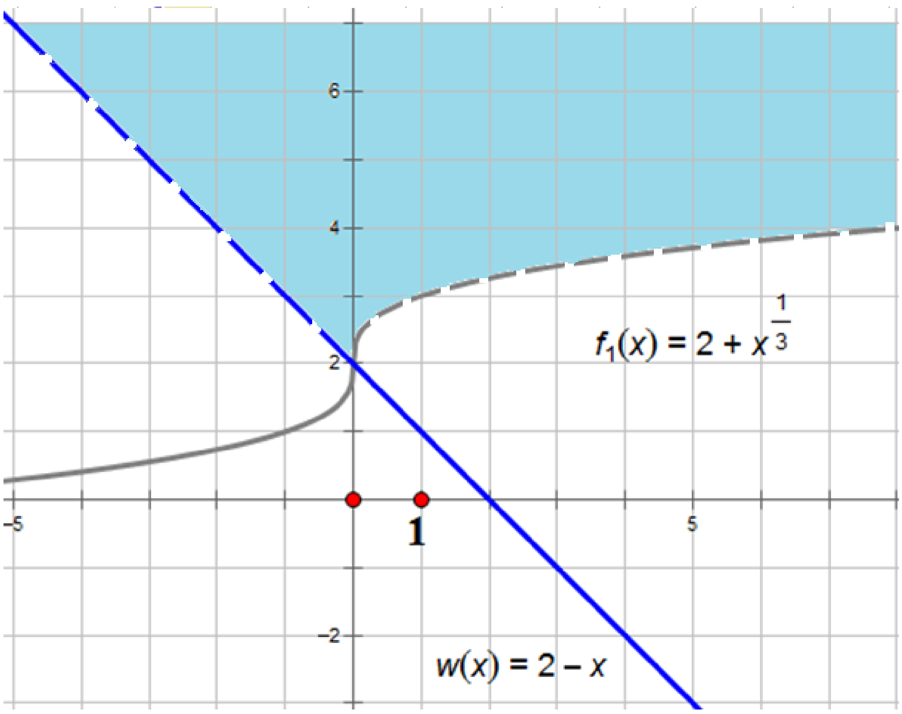
5. Решите графически систему неравенств

$$\begin{cases} y + x - 2 > 0 \\ y - \sqrt[3]{x} > 2 \end{cases}$$

Перепишем систему:

$$\begin{cases} y > 2 - x \\ y > 2 + \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

Решения системы лежат выше прямой, и выше функции $2 + \sqrt[3]{x}$, причем точки, принадлежащие обеим функциям, в решение не войдут, что и показано штриховкой:



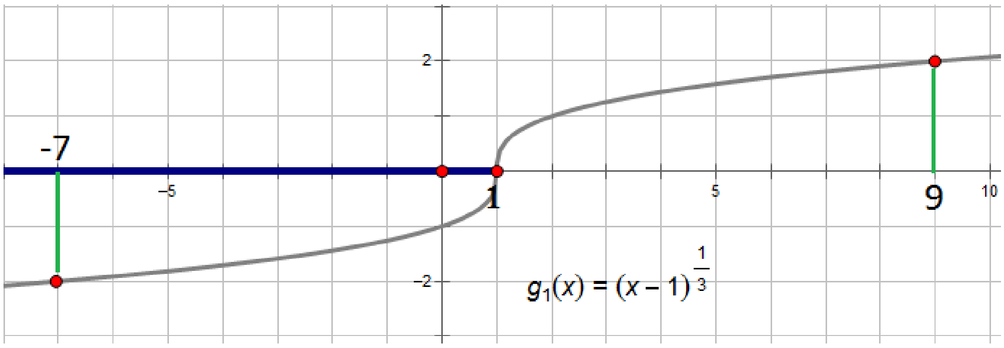
Вариант 2.

1. Постройте график функции $y = \sqrt[3]{x-1}$. По графику найдите:

а) значение функции при значении аргумента, равном -7;

б) значение аргумента, если значение функции равно 2;

в) решение неравенства $y(x) < 0$.

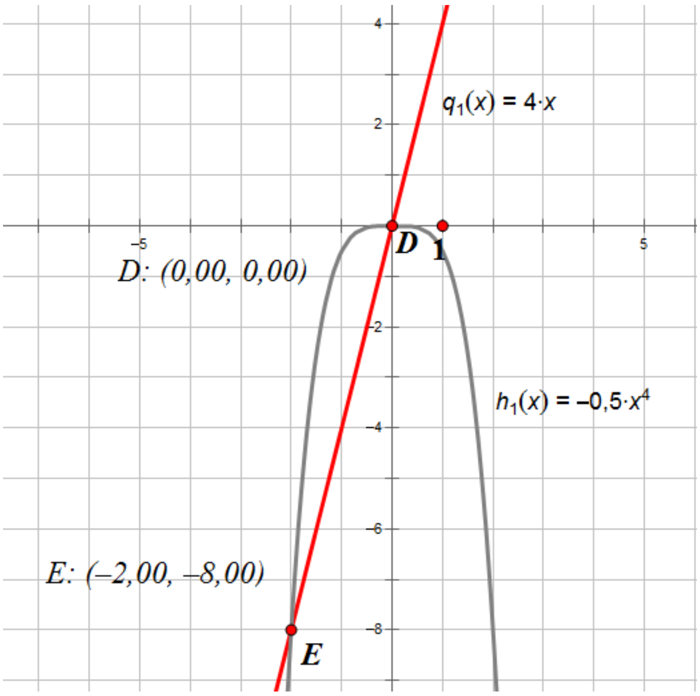


а) При $x = -7 \quad y(x) = -2$.

б) $(x) = 2$ при $\quad x = 9$.

в) решение неравенства $y(x) < 0$: $x \in (-\infty;\ 1)$ – точка 1 в решение не входит.

2. Решите графически уравнение $-0{,}5x^4 = 4x$.



Ответ: (0;0), (-2;-8).

3. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{15}\right) \cdot \sqrt[3]{9} = \left(3^{\frac{1}{3}} + 15^{\frac{1}{3}}\right) \cdot 9^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} + (3^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 3 + 3\sqrt[3]{5}$

б) $\sqrt[3]{10-\sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10+\sqrt{73}} = \left(10-\sqrt{73}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(10+\sqrt{73}\right)^{\frac{1}{3}} =$

$$\left(\left(10-\sqrt{73}\right)\left(10+\sqrt{73}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = \left(10^2 - (\sqrt{73})^2\right)^{\frac{1}{3}} = (100-73)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

4. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Решите уравнение $f(x^2) - 3f(x) - 10 = 0$

$$\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} - 10 = 0$$

Вводим замену: $x^{1/3} = t$:

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot (-10) = 49$$
$$t_1 = \frac{3 + 7}{2} = 5$$
$$t_2 = \frac{3 - 7}{2} = -2$$

Делаем обратную замену:

$$\sqrt[3]{x} = 5$$
$$x_1 = 5^3 = 125$$

Либо

$$\sqrt[3]{x} = -2$$
$$x_2 = (-2)^3 = -8$$

Ответ: $x \in \{125, -8\}$

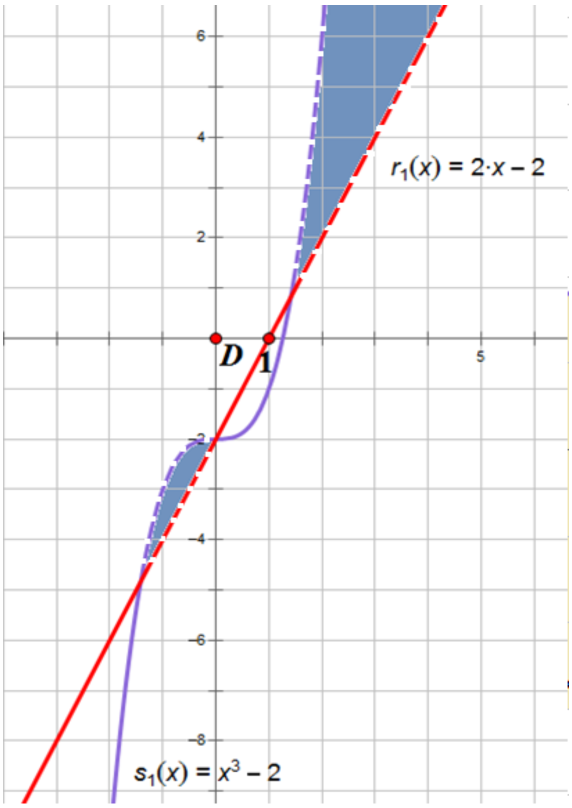
5. Решите графически систему неравенств

$$\begin{cases} y + 2 > 2x \\ y - x^3 + 2 < 0 \end{cases}$$

Перепишем систему:

$$\begin{cases} y > 2x - 2 \\ y < x^3 - 2 \end{cases}$$

Решения системы лежат выше прямой, но ниже функции $x^3 - 2$, причем точки, принадлежащие обеим функциям, в решение не войдут, что и показано штриховкой:



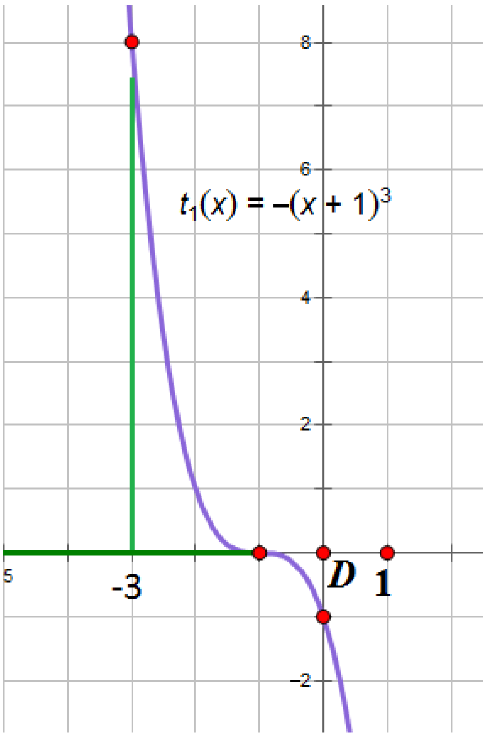
Вариант 3.

1. Постройте график функции $y = -(x+1)^3$. По графику найдите:

а) значение функции при значении аргумента, равном -3;

б) значение аргумента, если значение функции равно -1;

в) решение неравенства $y(x) \geq 0$.

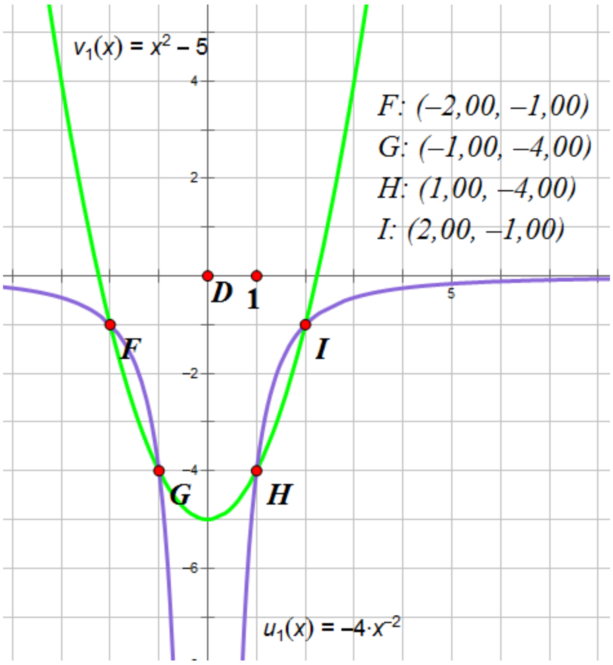


а) При $x = -3 \quad y(x) = 8$.

б) $y(x) = -1$ при $x = 0$.

в) решение неравенства $y(x) \geq 0$: $x \in (-\infty;\ 1]$.

2. Решите графически уравнение $-4x^{-2} = x^2 - 5$.



Ответ: (-2;-1), (-1;-4), (1;-4), (2;-1).

3. Упростите выражение:

а) $(\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{30}) \cdot \sqrt[3]{36} = (6^{\frac{1}{3}} + 30^{\frac{1}{3}}) \cdot 36^{\frac{1}{3}} = (6^3)^{\frac{1}{3}} + (6^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 6 + 6\sqrt[3]{5}$

б) $\sqrt[3]{12 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[3]{12 + \sqrt{19}} = \left(12 - \sqrt{19}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(12 + \sqrt{19}\right)^{\frac{1}{3}} =$

$\left(\left(12 - \sqrt{19}\right)\left(12 + \sqrt{19}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = \left(12^2 - (\sqrt{19})^2\right)^{\frac{1}{3}} = (144 - 19)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$

4. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Решите уравнение

$f((x-1)^2) + 5f(x-1) + 6 = 0$

$$\sqrt[3]{(x-1)^2} + 5\sqrt[3]{x-1} + 6 = 0$$

Вводим замену: $(x-1)^{1/3} = t$:

$$t^2 + 5t + 6 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 6 = 1$$
$$t_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$$
$$t_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$$

Делаем обратную замену:

$$\sqrt[3]{x-1} = -2$$
$$x - 1 = (-2)^3$$

$$x_1 = -7$$

Либо

$$\sqrt[3]{x-1} = -3$$
$$x - 1 = (-3)^3$$
$$x_2 = -8$$

Ответ: $x \in \{-7, -8\}$

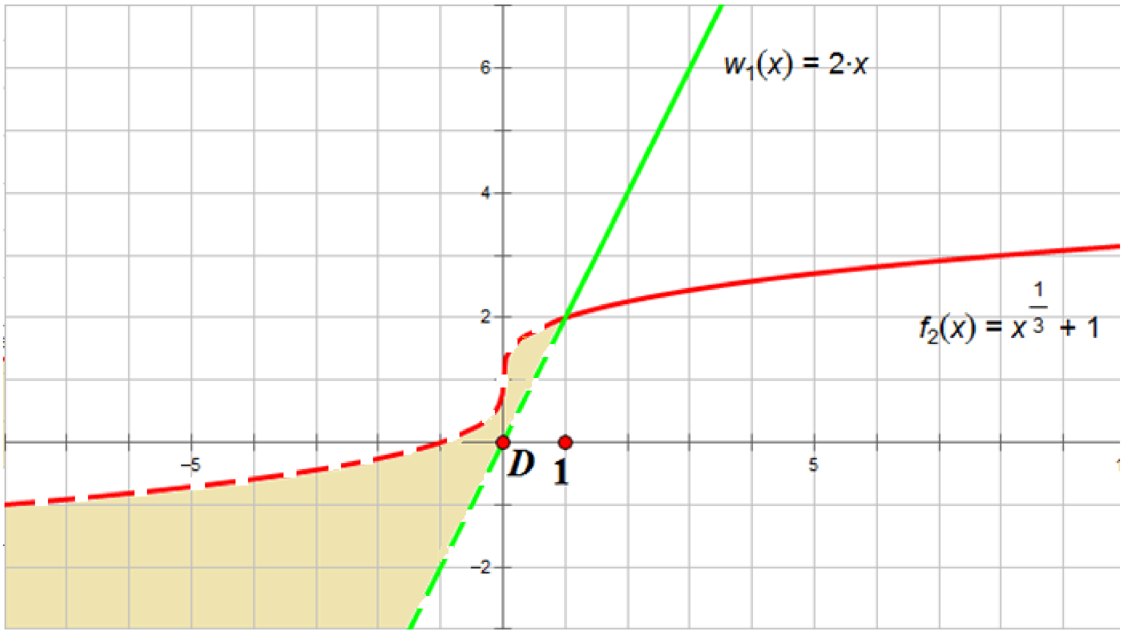
5. Решите графически систему неравенств

$$\begin{cases} y - 2x > 0 \\ y - 1 < \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

Перепишем систему:

$$\begin{cases} y > 2x \\ y < \sqrt[3]{x} + 1 \end{cases}$$

Решения системы лежат выше прямой, но ниже функции $\sqrt[3]{x} + 1$, причем точки, принадлежащие обеим функциям, в решение не войдут, что и показано штриховкой:



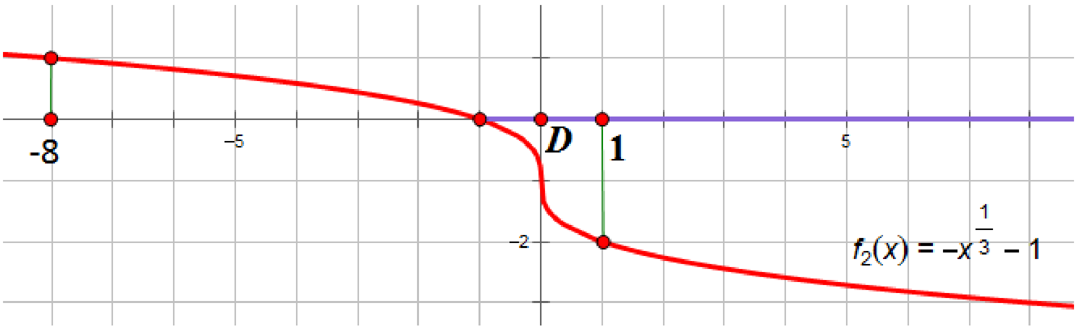
Вариант 4.

1. Постройте график функции $y = -\sqrt[3]{x} - 1$. По графику найдите:

а) значение функции при значении аргумента, равном 1;

б) значение аргумента, если значение функции равно 1;

в) решение неравенства $y(x) \leq 0$.

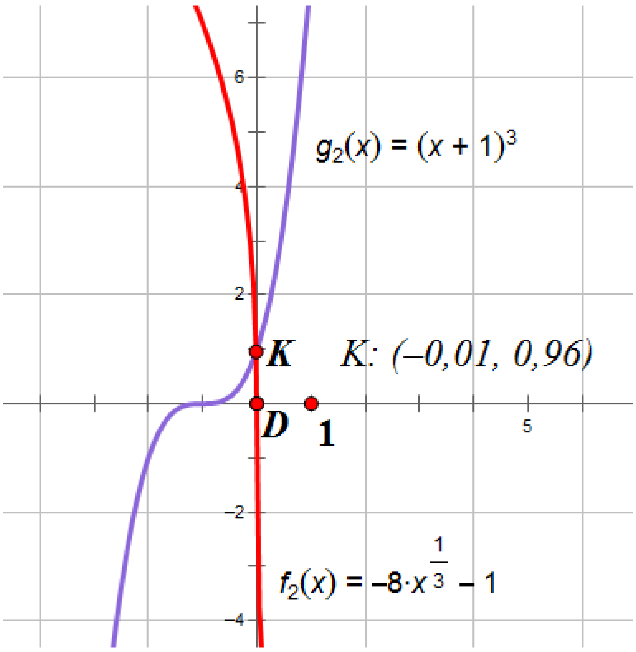


а) При $x = 1 \quad y(x) = -2$.

б) $y(x) = 1 \quad$ при $x = -8$.

в) решение неравенства $y(x) \geq 0$: $x \in [-1;\ +\infty)$.

2. Решите графически уравнение $-8x^{-3} = (x+1)^3$.



Ответ: (0;1).

3. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{20}\right) \cdot \sqrt[3]{25} = \left(5^{\frac{1}{3}} + 20^{\frac{1}{3}}\right) \cdot 25^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} + (5^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 5 + 5\sqrt[3]{4}$

б) $\sqrt[3]{15 - \sqrt{9}} \cdot \sqrt[3]{15 + \sqrt{9}} = \left(15 - \sqrt{9}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(15 + \sqrt{9}\right)^{\frac{1}{3}} =$

$$\left(\left(15 - \sqrt{9}\right)\left(15 + \sqrt{9}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = \left(15^2 - (\sqrt{9})^2\right)^{\frac{1}{3}} = (225 - 9)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{216} = 6$$

4. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Решите уравнение

$$f((x+1)^2) + 3f(x+1) - 10 = 0$$

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} + 3\sqrt[3]{x+1} - 10 = 0$$

Вводим замену: $(x+1)^{1/3} = t$:

$$t^2 + 3t - 10 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot (-10) = 49$$

$$t_1 = \frac{-3+7}{2} = 2$$
$$t_2 = \frac{-3-7}{2} = -5$$

Делаем обратную замену:

$$\sqrt[3]{x+1} = 2$$
$$x+1 = 2^3$$
$$x_1 = 7$$

Либо

$$\sqrt[3]{x+1} = -5$$
$$x+1 = (-5)^3$$
$$x_2 = -126$$

Ответ: $x \in \{7, -126\}$

5. Решите графически систему неравенств

$$\begin{cases} y + x^3 - 2 > 0 \\ y < 0{,}5x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 2 - x^3 \\ y < 0{,}5x + 2 \end{cases}$$

Решения системы лежат ниже прямой, но выше функции $2 - x^3$, причем точки, принадлежащие обеим функциям, в решение не войдут, что и показано штриховкой: